Sélection internationale Session 2015
École Normale Supérieure Paris
Épreuve de culture scientifique - **Informatique** Durée : 3 heures

Pour les candidats ayant choisi **l'informatique** comme **spécialité principale**

Si vous ne parvenez pas à répondre à une question, vous pouvez cependant l'utiliser comme hypothèse pour les questions suivantes.

Calculatrices interdites.

Exercice 1. Supposons que nous avons un tableau $A[1 \dots n]$ de nombres qui peuvent être positifs, nuls ou négatifs et qui ne sont pas nécessairement des entiers.

1. Décrire et analyser un algorithme qui trouver la somme la plus grande des éléments dans un sous-tableau consécutif $A[i \dots j]$.

2. Décrire et analyser un algorithme qui trouver le produit le plus grand des éléments dans un sous-tableau consécutif $A[i \dots j]$.

Exercice 2.

1. Décrire et analyser un algorithme pour trier un tableau $A[1..n]$ en appelant uniquement une fonction TriRacine(k), qui trie le sous-tableau $A[k+1, \dots, k+\sqrt{n}]$ en place, étant donné un entier arbitraire k entre 0 et $n - \lceil\sqrt{n}\rceil$ comme entrée. Votre algorithme est seulement autorisé à consulter ou modifier le tableau en appelant TriRacine ; en particulier, votre algorithme ne pourra pas directement comparer, déplacer ou copier les éléments du tableau. Combien de fois votre appelle la fonction TriRacine dans le pire cas ?

2. Montrer que votre algorithme de la question 1 est optimal (à un facteur constant près). En d'autres mots, si $f(n)$ est le nombre d'appels que votre algorithme fait à la fonction TriRacine, montrer qu'il n'existe pas d'algorithme qui fait $o(f(n))$ appels à TriRacine.

3. Supposons désormais que TriRacine est implanté récursivement, en appelant l'algorithme de la question 1. Par exemple, au second niveau de la récursion, l'algorithme trie des tableaux de taille approximative $n^{1/4}$. Quel est le temps d'exécution dans le pire des cas de l'algorithme de tri ainsi obtenu ? (Pour simplifier l'analyse, vous pouvez supposer que la taille n du tableau est de la forme 2^{2^k}, de sorte que les racines carrées répétés sont toutes des entiers.)

Exercice 3. Pour cette question, nous avons besoin des définitions suivantes.

Definition 1. Un **graphe** G is une paire (V, E) où V est un ensemble appellé sommet et E est un ensemble d'arètes, c'est-à-dire des sous-ensemble de V de taille 2.

Definition 2. Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle.

Definition 3. Un graphe est **planaire** s'il peut être dessiné dans le plan sans que des arêtes ne se croisent.

Dans un graphe planaire dessiné dans le plan, le plan est séparé en régions appellés *faces*.

Il y a toujours une face "infinie" qu'on appelle la *face externe*.

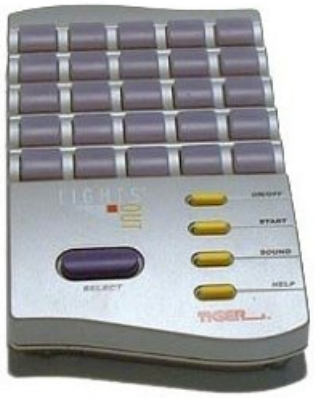
Definition 4. Une **coloration** d'un graphe $G = (V, E)$ avec k coleurs est un assignation $c : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ tel que les sommet adjacents reçoivent des couleurs différentes.

Si un tel c existe, G est dit **k-colorable**.

1. Deduce le nombre d'arêtes dans un arbre à partir de son nombre de sommets.
2. Montrer qu'un graphe planaire avec v sommets, e arêtes et f faces satisfait $f + v = e + 2$.
3. Montrer que le nombre d'arêtes d'un graphe planaire est borné par une fonction linéaire de son nombre de sommets.
4. Montrer que tout graphe planaire est 6-colorable.
5. Montrer, en admettant le théorème de Jordan, que tout graphe planaire est 5-colorable.

Exercice 4. Le jeu "Lights Out!", commercialisé par Tiger Electronics, consiste en un tableau 5×5 de boutons munis de lampe. En appuyant sur un bouton, la lampe associée change de configuration (de allumée à éteinte ou de éteinte à allumée) tout comme les quatres lampes adjacentes (ou moins) qui sont les voisines immédiates verticales et horizontales de ce bouton.

Le but du jeu est, étant donnée une configuration initiale de lampes allumées et éteintes, d'éteindre toutes les lampes. Nous généralisons ce jeu à un problème de graphe. Nous avons un graphe arbitraire G avec un bouton muni d'une lampe à chaque sommet du graphe. En appuyant sur un bouton, la lampe associée change de configuration (de allumée à éteinte ou de éteinte à allumée) tout comme les lampes associées au sommets voisins dans le graphe. Une configuration est juste la description des lampes allumées et éteintes dans le graphe. Une configuration est résoluble si il est possible à partir d'atteindre la configuration où toutes les lampes sont éteintes en appuyant sur des boutons. Certaines (mais évidemment pas toutes) configuration ne sont pas résolubles.



Adrienne Barr VidGame0 ©2002

1. Montrer que le jeu se réduit à la question de déterminer un ensemble X des sommets, appelé *ensemble d'activation*, de sorte qu'appuyer sur tous les boutons de X permet d'atteindre la configuration où toutes les lampes sont éteintes.
2. Donner un *ensemble d'activation* pour la configuration suivante du jeu original "Lights out!" :

3. Supposons que le graphe G est simplement un cycle de longueur n. Donner une caractérisation simple et complète des configurations résolubles dans ce graphe.

4. Caractériser l'ensemble des configurations résolubles lorsque le graphe G est un arbre arbitraire.

5. Un graphe grille est un graphe dont les sommets forment une grille régulières $h \times w$ de points entiers et les arêtes relient les sommets à leurs voisins verticaux et horizontaux immédiats. Caractériser l'ensemble des configurations résolubles lorsque le graphe G est un graphe grille (par exemple, le jeu original "Lights Out" peut être modélisé comme un graphe grille 5×5).

6. Le but des questions suivantes est de montrer que la configuration où toutes les lampes sont allumées est résoluble pour tout graphe G (par récurrence sur n, le nombre de sommets de G). Supposons que cette assertion est vraie pour les graphes avec au plus $n \geq 1$ sommets. Soit G un graphe avec $n+1$ sommets et pour chaque sommet v de G, notons X_v un ensemble d'activation pour la configuration où toutes les lampes sont allumées sur le graphe à n sommets $G \setminus \{v\}$. Nous supposons que pour chaque v de G, X_v n'est pas un ensemble d'activation pour la configuration où toutes les lampes sont allumées dans G.

   (a) Montrer que si n est impair, il existe un ensemble d'activation pour la configuration où toutes les lampes sont allumées dans G.

   (b) Montrer que si n est pair, alors au moins un sommet v^* de G a un degré pair.

   (c) Montrer que si l'on appuie sur le bouton du sommet v^* et sur tous les boutons des sommets (avec répétition) des ensembles X_u pour les sommets $u \in G$ qui ne sont pas dans le voisinage de v^*, nous obtenons la configuration où toutes les lampes sont éteintes dans G.

   (d) Conclure.